LOGARITMI

Definizione: si dice logaritmo in base b di un numero a, l'esponente che si deve dare al numero b per ottenere a:

$$\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$$

dove $a > 0$, $b > 0, b \neq 1$.

Se le basi sono positive (e diverse dall'unità) e gli argomenti sono positivi, valgono le seguenti **proprietà**:

1. $\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$
2. $\log_b a - \log_b c = \log_b \left(\dfrac{a}{c}\right)$
3. $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
4. $\log_b b = 1$
5. $\log_b 1 = 0$
6. $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$
7. $a^{\log_a b} = b$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

In generale un'equazione si dice logaritmica se l'incognita compare come argomento di uno o più logaritmi.

Per risolvere un'equazione logaritmica seguiremo, in generale, il seguente procedimento:

- determiniamo il **dominio** (ossia la C.E.) dell'equazione **imponendo che l'argomento di ogni logaritmo sia positivo**;
- applichiamo le proprietà dei logaritmi fino a ottenere un'equazione del tipo:
  - o $\log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow$ uguagliamo gli argomenti: $f(x) = g(x)$ e risolviamo (<u>tenendo conto del dominio</u>)

  oppure un'equazione del tipo:
  - o $\log_b f(x) = n \Rightarrow$ usiamo la definizione di logaritmo: $f(x) = b^n$ e risolviamo (<u>tenendo conto del dominio</u>)

ESEMPI:

1. $\log(x-2) + \log x = \log 3$
   a. dominio: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$
   b. applicando le proprietà, la disequazione diventa: $\log[(x-2)x] = \log 3$
   c. uguagliando gli argomenti: $(x-2)x = 3 \Rightarrow x = -1 \vee x = 3$
   d. tenendo conto del dominio, l'unica soluzione accettabile è: $x = 3$.

2. $\log_2(x+5)=\log_4(x+7)$

   a. dominio: $\begin{cases} x+5>0 \\ x+7>0 \end{cases} \Rightarrow x>-5$

   b. applicando le proprietà, la disequazione diventa: $\log_2(x+5)=\dfrac{\log_2(x+7)}{\log_2 4} \Rightarrow$

   $\Rightarrow 2\log_2(x+5)=\log_2(x+7) \Rightarrow \log_2(x+5)^2=\log_2(x+7)$

   c. uguagliando gli argomenti: $(x+5)^2=x+7 \Rightarrow x=-3 \vee x=-6$

   d. tenendo conto del dominio, l'unica soluzione accettabile è: $x=-3$.

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

La funzione $\log_b x$ è:

- crescente se $b>1$
- decrescente se $0<b<1$

Pertanto:

- se $b>1$, allora:
  1. $\log_b f(x) > \log_b g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$
  2. $\log_b f(x) > n \Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)>b^n \end{cases}$
  3. quindi: nel passare alla disuguaglianza tra gli argomenti dei logaritmi **si mantiene il verso della disuguaglianza**
- se $0<b<1$, allora:
  1. $\log_b f(x) > \log_b g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$
  2. $\log_b f(x) > n \Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<b^n \end{cases}$
  3. quindi: nel passare alla disuguaglianza tra gli argomenti dei logaritmi **si cambia il verso della disuguaglianza.**

ESEMPI:

1. $\log_2(x-1)<\log_2 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1<3 \end{cases} \Rightarrow 1<x<4$

   notare che, essendo la base dei logaritmi maggiore dell'unità, nel passare alla disuguaglianza tra gli argomenti, si **mantiene il verso** della disuguaglianza di partenza

2. $\log_{\frac{2}{3}}(2x+7)>0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+7>0 \\ 2x+7<1 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{7}{2}<x<-3$

   notare che, essendo la base dei logaritmi minore dell'unità, nella 2ª disuguaglianza, ottenuta utilizzando la definizione di logaritmo, si **cambia il verso** della disuguaglianza di partenza.