EQUAZIONI e DISEQUAZIONI CON MODULI

Il **valore assoluto** o **modulo** di un numero reale a è definito nel seguente modo:

$$|a| = \begin{cases} +a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

La quantità a all'interno del modulo, viene detta **argomento** del modulo stesso.
Il problema di determinare l'eventuale soluzione di un'equazione o di una disequazione contente moduli consiste nel poter "togliere" i moduli presenti nell'equazione di partenza per poter poi applicare i normali metodi risolutivi all'equazione priva di moduli.
Ovviamente potremo "togliere" i moduli solo attenendoci alla definizione di modulo data sopra; pertanto procederemo nel seguente modo:

1. studiamo il segno dell'argomento di ciascun modulo presente nell'equazione di partenza;
2. rappresentiamo graficamente i segni degli argomenti;
3. utilizziamo il grafico dei segni per "tradurre" l'equazione (o la disequazione) di partenza in più sistemi costruiti nel seguente modo:
    a. la prima relazione è quella che individua gli intervalli (dell'incognita) in cui i segni degli argomenti si comportano "diversamente"
    b. la seconda relazione è la "traduzione" dell'equazione (o disequazione) di partenza "privata" dei moduli, avendo cura, nell'eseguire tale operazione, di:
        i. cambiare il segno dell'argomento se ci troviamo in un intervallo in cui l'argomento stesso fosse negativo
        ii. non cambiare il segno dell'argomento se ci troviamo in un intervallo in cui l'argomento stesso fosse positivo
4. uniamo le soluzioni dei vari sistemi ottenuti.

ESEMPIO:

- equazione $\quad |3-x| + |x-2| = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

1. studiamo il segno dell'argomento di ciascun modulo presente nell'equazione di partenza:
   segno$(3-x)$ $\Rightarrow 3-x>0 \Rightarrow x<3$
   segno$(x-2)$ $\Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2$
2. rappresentiamo graficamente i segni degli argomenti:

		2		3	
segno$(3-x)$	+		+		—
segno$(x-2)$	—		+		+

3. utilizziamo tale grafico per "tradurre" l'equazione (o la disequazione) di partenza in 3 sistemi:

sistema n°1: $\begin{cases} x<2 \\ 3-x-(x-2) = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x = \frac{22}{10} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

sistema n°2: $\begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ 3 - x + (x-2) = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

sistema n°3: $\begin{cases} x > 3 \\ -(3-x) + (x-2) = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow S_3 = \{4\}$

4. uniamo le soluzioni dei vari sistemi ottenuti.
   $S_1 \cup S_3 \cup S_3 = \left\{\frac{5}{2}; 4\right\}$

- disequazione $|3-x| + |x-2| < \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

1. studiamo il segno dell'argomento di ciascun modulo presente nell'equazione di partenza:
   segno$(3-x)$ $\Rightarrow 3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$
   segno$(x-2)$ $\Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
2. rappresentiamo graficamente i segni degli argomenti:

		2		3	
segno$(3-x)$	+		+		—
segno$(x-2)$	—		+		+

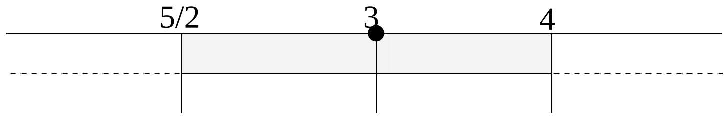
3. utilizziamo tale grafico per "tradurre" l'equazione (o la disequazione) di partenza in 3 sistemi:

sistema n°1: $\begin{cases} x < 2 \\ 3 - x - (x-2) < \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > \frac{22}{10} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

sistema n°2: $\begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ 3 - x + (x-2) < \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \left\{\frac{5}{2} < x \le 3\right\}$

sistema n°3: $\begin{cases} x > 3 \\ -(3-x) + (x-2) < \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow S_3 = \{3 < x < 4\}$

4. uniamo le soluzioni dei vari sistemi ottenuti aiutandoci con un grafico (con un unico livello!):



Quindi: $S_1 \cup S_3 \cup S_3 = \left\{\frac{5}{2} < x < 4\right\}$