DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Una disequazione si dice irrazionale se in essa sono presenti radicali irriducibili e contenenti un'incognita.
Limitiamoci a considerare disequazioni del tipo:

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{oppure} \quad \sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

Il problema si risolve tenendo conto principalmente delle seguenti questioni:

1. **condizione di esistenza:**
   a. un radicale di indice <u>dispari</u> è definito, nell'insieme dei numeri reali, per <u>qualsiasi valore</u> che non renda privo di significato il radicando;
   b. un radicale di <u>indice pari</u> è definito, nell'insieme dei numeri reali, solo se il <u>radicando</u> è <u>maggiore o uguale a zero</u>;
2. **proprietà delle disuguaglianze riguardo all'elevamento a potenza:**
   a. se n è dispari, allora:
      i. $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ per qualsiasi valore di a e b
      ii. $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ per qualsiasi valore di a e b
   b. se n è pari, allora:
      i. $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ solo se a e b sono entrambi positivi
      ii. $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ solo se a e b sono entrambi positivi

Pertanto il procedimento risolutivo sarà diverso a seconda del fatto che l'indice del radicale sia pari o dispari.

CASO *n* dispari:
in tal caso il radicale è sempre reale; tenendo inoltre conto delle proprietà delle disuguaglianze, possiamo tranquillamente elevare alla n ambo i membri della disequazione, ottenendo così una disequazione razionale equivalente a quella di partenza, rispettivamente:

$$f(x) < [g(x)]^n \quad \text{oppure} \quad f(x) > [g(x)]^n$$

ESEMPI:

1. $2x-1 > \sqrt[3]{8x^3-4x^2+x-2} \Rightarrow (2x-1)^3 > 8x^3-4x^2+x-2 \Rightarrow \frac{5-\sqrt{57}}{16} < x < \frac{5+\sqrt{57}}{16}$
2. $x-2 < \sqrt[3]{x^3-4} \Rightarrow (x-2)^3 < x^3-4 \Rightarrow x < \frac{3-\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

CASO *n* pari:

Trattiamo prima il caso di $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$.

- innanzitutto il radicale deve esistere nell'insieme R, quindi $f(x) \geq 0$
- ne consegue $g(x) > 0$
- essendo quindi ambo i membri non negativi, possiamo elevare alla n ottenendo la relazione: $f(x) < [g(x)]^n$.

In definitiva la disequazione $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

Trattiamo ora il caso di $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$.

Dobbiamo ulteriormente distinguere tra i due casi: $g(x) < 0$ e $g(x) \geq 0$

- se $g(x) < 0$, allora è sufficiente che il radicale esista, cioè che $f(x) \geq 0$;
- se $g(x) \geq 0$, allora ambo i membri risultano non negativi e possiamo elevare alla n ottenendo la relazione: $f(x) > [g(x)]^n$; notiamo che tale relazione rende superfluo imporre la condizione di realtà sul radicando.

In definitiva la disequazione $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ è equivalente all'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$sistema\,1: \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \cup \quad sistema\,2: \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$$

ESEMPI:

1. $\sqrt{3x-2} < 2x-5 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 2x-5 > 0 \\ 3x-2 < (2x-5)^2 \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{23+\sqrt{97}}{8}$
2. $\sqrt{x+2} > x-4 \Rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x+2 > (x-4)^2 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 7$