Esercizi risolti e guidati

Insieme di definizione (o di esistenza)

L'insieme dei numeri razionali per i quali la frazione algebrica $\frac{A}{B}$ ha senso si chiama **insieme di definizione** (o *di esistenza*, o *dominio*) della frazione ed è formato dai valori per i quali $B \neq 0$.

Quindi $B \neq 0$ è la *condizione di esistenza* (C.E.) della frazione algebrica.

Stabilire il dominio delle seguenti frazioni, a valori in $\mathbb{Q}$.

1 $\frac{7x+3}{3x+5} \quad \Rightarrow 3x+5 \neq 0 \quad \Rightarrow x \neq -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow D = \mathbb{Q} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}.$

2 $\frac{4(x+5)}{7x(x-4)} \quad \Rightarrow \begin{cases} 7x \neq 0 & \Rightarrow x \neq 0 \\ x-4 \neq 0 & \Rightarrow x \neq 4 \end{cases} \quad \Rightarrow D = \mathbb{Q} - \{0,\ 4\}.$

3 $\frac{8a+b}{a^2-4} = \frac{8a+b}{(a+2)(a-2)} \quad \Rightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{cases} \quad \Rightarrow D = \mathbb{Q} - \{\pm 2\}.$

4 $\frac{36x}{x^3-27} = \frac{36x}{(x-3)(x^2+3x+9)} \quad \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x^2+3x+9 \neq 0, \forall x \end{cases} \quad \Rightarrow D = \mathbb{Q} - \{3\}.$

Semplificazione di una frazione algebrica

Per semplificare una frazione algebrica:

- *si scompongono in fattori i termini della frazione* (*cioè numeratore e denominatore*), *se non lo sono già*;
- *si indica il dominio della frazione, cioè i valori che non annullano i denominatori*;
- *si dividono i termini scomposti per ogni loro fattore comune.*

Semplificare le seguenti frazioni.

5 $\frac{a^3-25ab^2}{2a^2-12ab+10b^2} = \frac{a(a^2-25b^2)}{2(a^2-6ab+5b^2)} = \frac{a(a+5b)\cancel{(a-5b)}}{2\cancel{(a-5b)}\,(a-b)} = \frac{a(a+5b)}{2(a-b)}.$ [C.E.: $a \neq 5b;\ a \neq b$]

6 $\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{8x^5+16x^3+8x} = \frac{[(x+1)^2-(x-1)^2][(x+1)^2+(x-1)^2]}{8x(x^4+2x^2+1)} =$ [C.E.: $x \neq 0$]

$= \frac{(x+\cancel{1}+x-\cancel{1})(\cancel{x}+1-\cancel{x}+1)(x^2+1+\cancel{2x}+x^2+1-\cancel{2x})}{8x(x^2+1)^2} =$

$= \frac{2 \cdot 2x(2x^2+2)}{8x(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{8x}\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{8x}(x^2+1)^{\cancel{2}\,1}} = \frac{1}{x^2+1}.$

7 $\frac{x^2-3x-4}{x^2-4x-5} = \frac{(x-4)\cancel{(x+1)}}{(x-5)\cancel{(x+1)}} = \frac{x-4}{x-5}.$ [C.E.: $x \neq 5;\ x \neq -1$]

Addizione e sottrazione di frazioni algebriche

Per addizionare due frazioni algebriche si deve:

- *ridurre tutte le frazioni allo stesso denominatore* (*cioè, dopo aver fattorizzato ogni denominatore, trovare il m.c.m. dei denominatori*);
- *dividere il denominatore comune per il denominatore di ogni frazione*;
- *moltiplicare il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione*;
- *risolvere le operazioni al numeratore*;
- *semplificare se possibile*.

14 $\dfrac{x+3}{a} + \dfrac{y+1}{2b} =$

I denominatori sono già fattorizzati, inoltre C.E.: $a \neq 0$; $b \neq 0$.

Poiché $m.c.m.\ (a, 2b) = 2ab$, si ha:

$= \dfrac{2b(x+3) + a(y+1)}{2ab} =$ risolviamo le operazioni al numeratore

$= \dfrac{2bx + 6b + ay + a}{2ab}$, non è possibile semplificare.

15 $\dfrac{5x}{x^2-1} - \dfrac{3x}{x+1} = \dfrac{5x - 3x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{5x - 3x^2 + 3x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-3x^2 + 8x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x(8-3x)}{(x-1)(x+1)}.$

[C.E.: $x \neq \pm 1$]

Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il prodotto di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

16 $\dfrac{x+3}{x+1} \cdot \dfrac{x^3+1}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2-9} = \dfrac{\cancel{x+3}}{\cancel{x+1}} \cdot \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x-1}} \cdot \dfrac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{(x-3)\cancel{(x+3)}} = \dfrac{x^3+1}{x-3}.$

Potenza di frazioni algebriche

Si ottiene elevando alla potenza indicata sia il numeratore sia il denominatore della frazione data.

17 $\left(\dfrac{3a^2bc}{2d}\right)^3 = \dfrac{\overset{(3a^2bc)^3}{27a^6b^3c^3}}{\underset{(2d)^3}{8d^3}}$