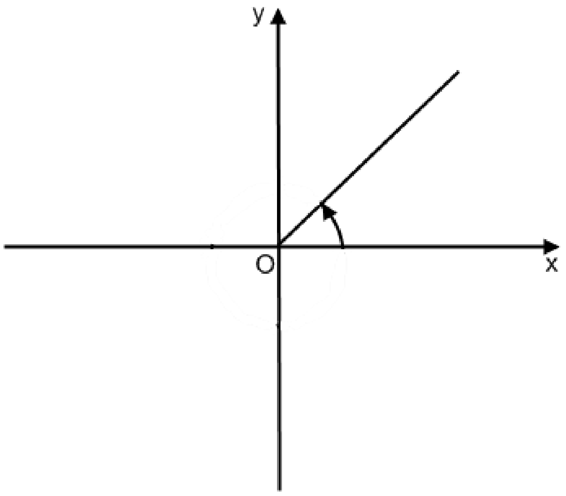
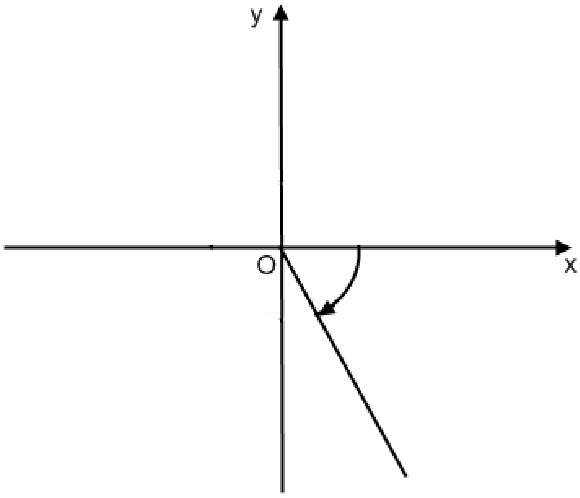
APPUNTI IN PREPARAZIONE ALLA VERIFICA DI LUNEDÌ 15/11

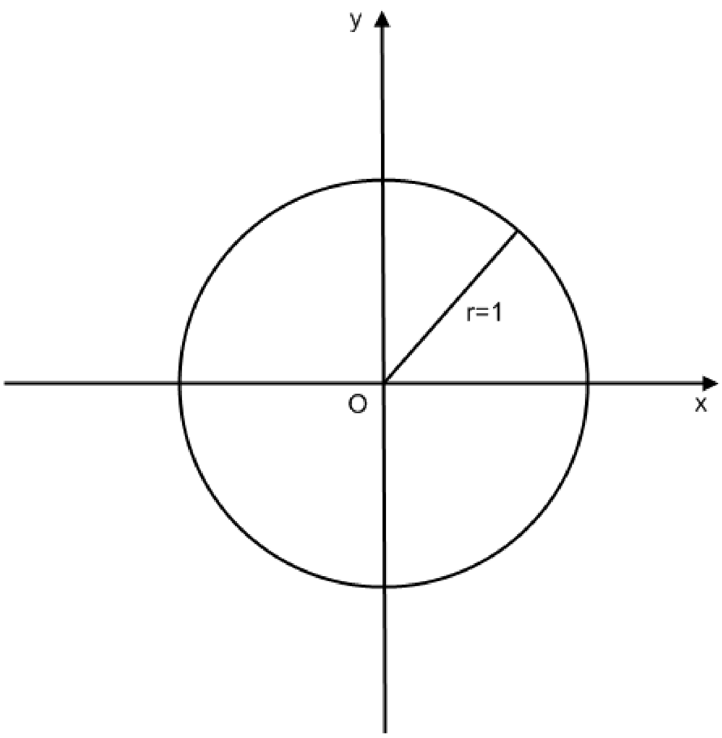
1. **Misura di un angolo**
   a. La più diffusa unità di misura dell'ampiezza degli angoli è il grado sessagesimale, detto semplicemente grado.
      i. Si dice **grado sessagesimale** la misura dell'ampiezza di un angolo che è la 360-esima parte di un angolo giro.
      ii. Come è ben noto, il simbolo usato per il grado (sessagesimale) è il °.
      iii. Con la convenzione usata, abbiamo che un angolo retto misura 90°, un angolo piatto 180° e un angolo giro 360°.
      iv. Si dice **minuto primo** la sessantesima parte di un grado; si dice **minuto secondo** la sessantesima parte di un minuto primo. Il minuto si indica con un apice ‘, mentre il secondo con due apici ‘’: ad esempio, 34°23’54’’ indica una misura di 34 gradi, 23 minuti e 54 secondi. Osserviamo esplicitamente che, dalla definizione data, un grado è pari a 60 minuti e un minuto è pari a 60 secondi.
   b. In matematica, oltre al grado, si utilizza anche un'altra unità di misura per gli angoli, che è il **radiante**.
      i. Data una circonferenza di raggio r e un angolo al centro , che insiste su un arco AB, il rapporto tra la lunghezza di AB ed r è detto **misura in radianti** di . Un'interessante proprietà, che deriva dalla definizione che abbiamo dato, e che talvolta è essa stessa utilizzata come definizione di radiante, è la seguente: Un angolo al centro che misura un radiante è tale che insiste su un arco di circonferenza lungo quanto il raggio.
      ii. Per **passare dalla misura in gradi alla misura in radianti** di un angolo, basta a questo punto una semplice proporzione; in particolare, indicando con α^r la misura in radianti e con $\alpha°$ quella in gradi di uno stesso angolo, si ha
      $\alpha° : 180 = \alpha^r : \pi$
      Di conseguenza, data la misura in gradi, per passare a quella in radianti si usa la formula: $\alpha^r = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180}$.
      Per passare ai gradi, data la misura in radianti, la formula, inversa della precedente, è: $\alpha° = \alpha^r \cdot \frac{180}{\pi}$
   c. **In topografia è spesso usato il grado cenetesimale.**
      i. Si dice **grado centesimale** la misura dell'ampiezza di un angolo che è la 100-esima parte di un angolo retto.
      ii. Per **passare dalla misura in gradi sessagesimali alla misura in gradi centesimali**, basta a questo punto una semplice proporzione; in particolare, indicando con α^c la misura in gradi centesimali e con $\alpha°$ quella in gradi sessagesimali di uno stesso angolo, si ha
      $\alpha^c : 100 = \alpha° : 90$
      Di conseguenza, data la misura in gradi sessagesimali, per passare a quella in centesimali si usa la formula: $\alpha^c = \alpha° \cdot \frac{10}{9}$.
      Per passare ai gradi sessagesimali, data la misura in centesimali, la formula, inversa della precedente, è: $\alpha° = \alpha^c \cdot \frac{9}{10}$

2. **Definizione delle funzioni goniometriche**
   a. Un angolo può essere **orientato**, cioè si può stabilire, convenzionalmente, un ordine tra i due lati, ovvero quale dei due lati sia il primo e quale il secondo; fatto questo, risulta individuato anche un "verso di percorrenza" dal primo al secondo lato, che può essere orario o antiorario. In matematica si considerano **positivi** gli angoli orientati in **verso antiorario**, **negativi** quelli in **verso orario**.
   b. Per definire le funzioni goniometriche, è necessario disporre gli angoli su un piano cartesiano: in matematica si usa la convenzione di rappresentare un angolo ponendo il vertice nell'origine e il primo lato sul semiasse positivo delle ascisse.

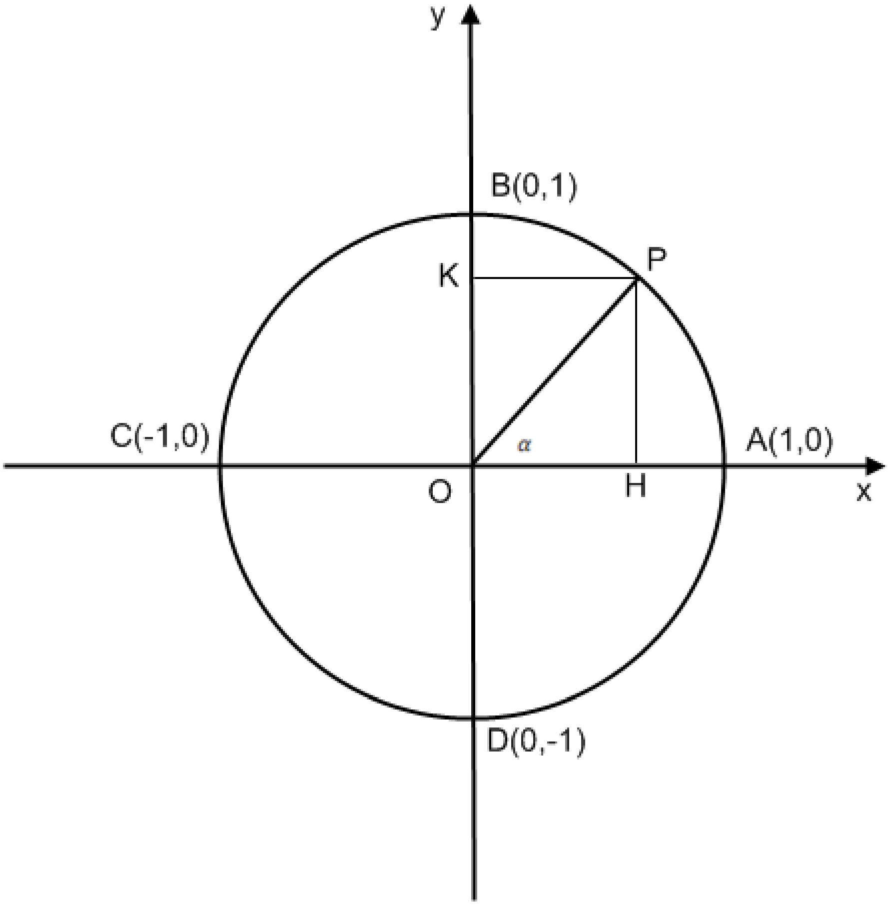




   c. Si dice **circonferenza goniometrica** una circonferenza su un piano cartesiano con centro nell'origine e raggio pari ad 1 (vedi figura).



d. Dato un angolo orientato di ampiezza α , disposto, secondo le convenzioni viste, su un piano cartesiano su cui sia rappresentata una circonferenza goniometrica, indichiamo con P l'intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza stessa; chiamiamo poi H e K, rispettivamente, le proiezioni di P sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate (vedi figura).



e. Si dice **seno** dell'angolo l'ordinata del punto P, **coseno** dell'angolo l'ascissa di P.

$\sin\alpha = \text{ordinata del punto P}$

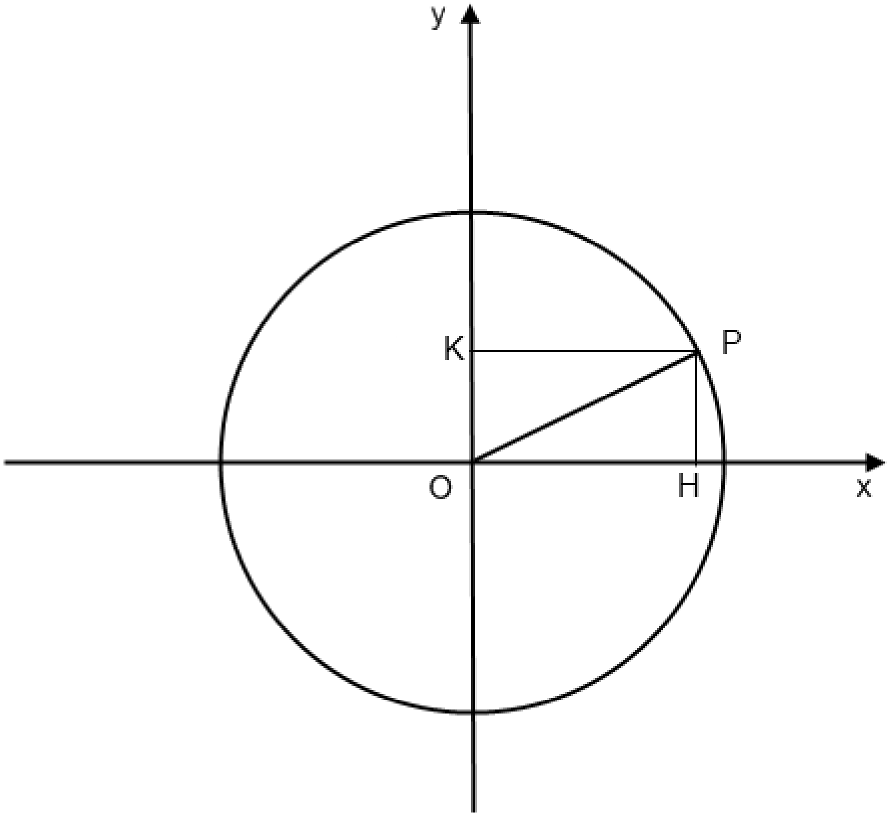
$\cos\alpha = \text{ascissa del punto P}$

f. Le altre funzioni goniometriche possono essere definite, per il momento, in modo completamente algebrico:

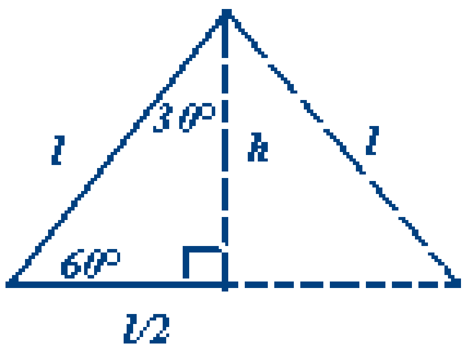
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
- $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

3. **Valori delle funzioni goniometriche per l'angolo di 30°**

a. Nella seguente figura vediamo rappresentato, secondo le convenzioni usuali, un angolo di 30° su un piano cartesiano con circonferenza goniometrica



Dette H e K le proiezioni di P rispettivamente sull'asse delle ascisse e delle ordinate, il triangolo OPH, rettangolo in H, ha l'angolo in O di 30°, per costruzione, quindi ha l'angolo in P di 60°: ne deriva che esso è metà triangolo equilatero di lato OP (che ha misura 1, essendo il raggio della circonferenza goniometrica).
Il teorema di Pitagora permette di ricavare una relazione generale tra lato l e altezza h di un triangolo equilatero:

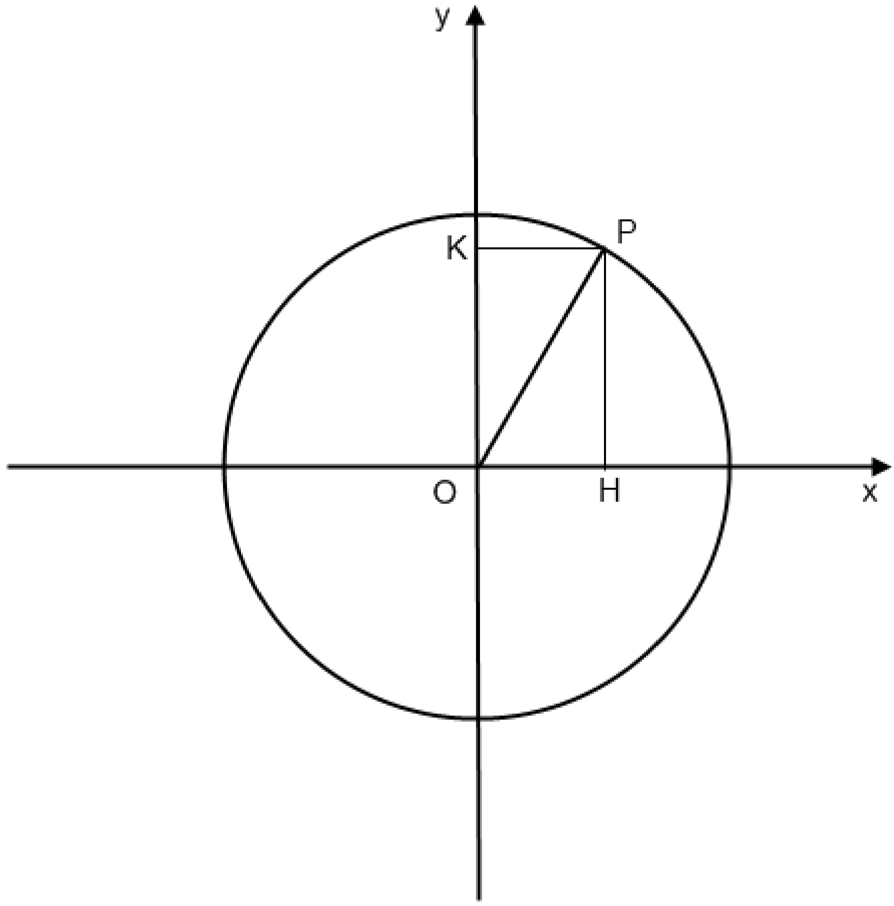


$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{l}{2}\sqrt{3}}$$

b. Nel nostro caso: $l = 1$, quindi: $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

4. Valori delle funzioni goniometriche per l'angolo di 60°

a. Nella figura seguente vediamo rappresentato un angolo di 60°.

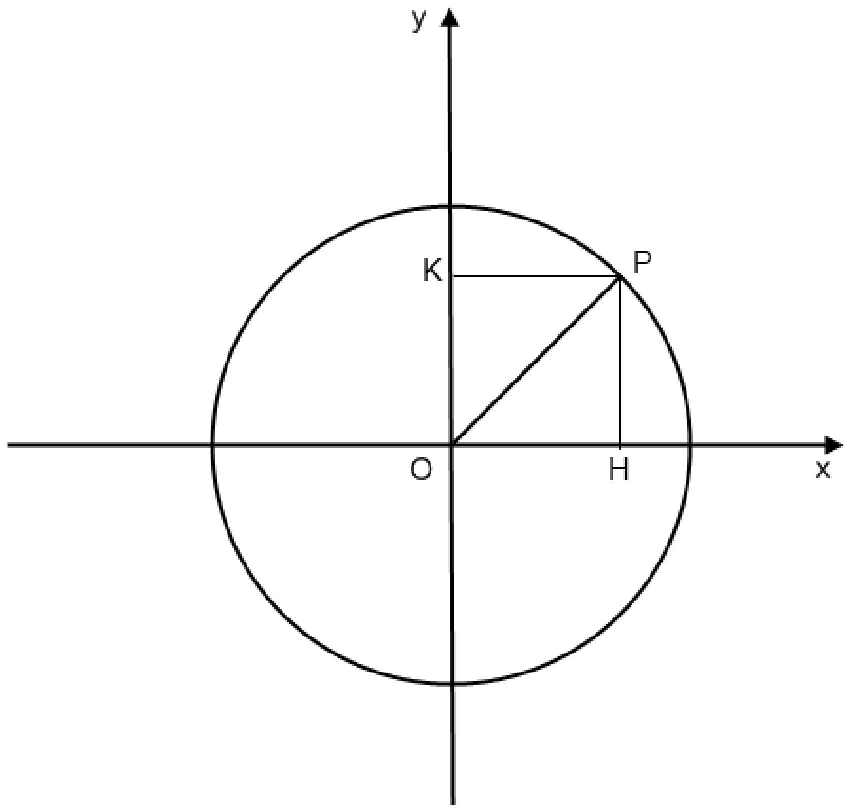


b. Analogamente al caso dell'angolo di 30°, il triangolo OPH è rettangolo in H ed è la metà di un triangolo equilatero di lato 1; stavolta, però, l'altezza del triangolo equilatero è PH.
c. Ragionando analogamente a quanto fatto in precedenza per l'angolo di 30°, utilizzando quindi la relazione generale tra lato e altezza di un triangolo equilatero si ha:

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad \cos 30° = \frac{1}{2}$$

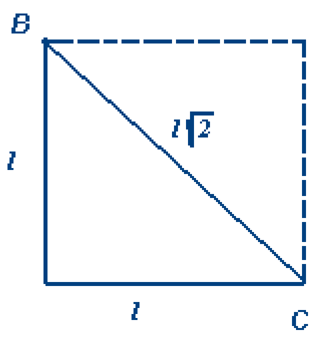
5. Valori delle funzioni goniometriche per l'angolo di 45°

a. rappresentiamo nella figura seguente l'angolo di 45° su un piano cartesiano con circonferenza goniometrica.



b. Si riconosce che il quadrilatero OHPK è un quadrato, la cui diagonale è OP (di misura unitaria).

c. Il teorema di Pitagora permette di ricavare una relazione generale tra lato l e diagonale d di un quadrato:



$$l^2 + l^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow \boxed{d = l\sqrt{2}}$$

d. Nel nostro caso: $l = 1$, quindi (razionalizzando il denominatore):

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. **Relazione goniometrica fondamentale:** $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
    a. tale relazione permette (insieme alle definizioni date precedentemente) di esprimere tutte le funzioni goniometriche per mezzo di una sola di esse:

vedi libro di testo pag. 24-26

7. **Angoli associati: vedi libro di testo pag. 28**
8. **Relazioni fra gli elementi di un triangolo: vedi libro di testo pag. 31.**